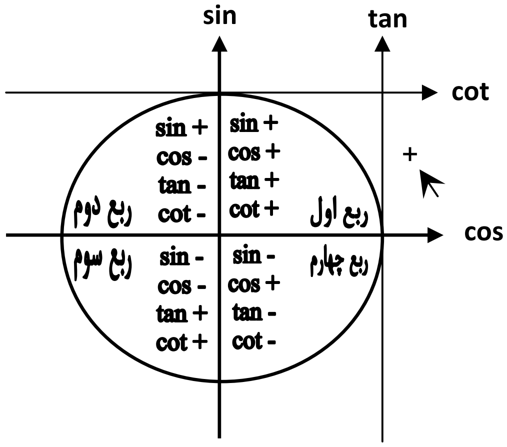
دایره ی مثلثاتی :

۱- طول شعاع آن یک واحد است.   ۲- چهار محور $\sin\theta , \cos\theta , \tan\theta , \cot\theta$ روی آن قرار دارند   ۳- دارای چهار ربع (ناحیه) می باشد

٤ - علامت های نسبت های مثلثاتی در ناحیه ها متفاوت است. ٥- مرکز آن مبدا مختصات است

٦- جهت مثبت آن حرکت روی محیط دایره خلاف حرکت عقربه ساعت می باشد.



تبدیل واحد های اندازه گیری : $\frac{D}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} = \frac{G}{۲۰۰}$

جدول نسبت های مثلثاتی (مقدار زاویه ها) :

رادیان	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π	x r y	
زاویه	۰°	۳۰°	۴۵°	۶۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°	فرمول ها در مثلث	$r^۲ = x^۲ + y^۲$
$sin\theta$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	۱	۰	-۱	۰	$sin\theta = \frac{y}{r}$	$-۱ \le sin\theta \le ۱$
$cos\theta$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	-۱	۰	۱	$cos\theta = \frac{x}{r}$	$-۱ \le cos\theta \le ۱$
$tan\theta$	۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱	$\sqrt{۳}$	∞	۰	∞	۰	$tan\theta = \frac{y}{x}$	$tan\theta \in \mathbb{R}$
$cot\theta$	∞	$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۰	∞	۰	∞	$cot\theta = \frac{x}{y}$	$cot\theta \in \mathbb{R}$

روابط مربوط به کمان ها

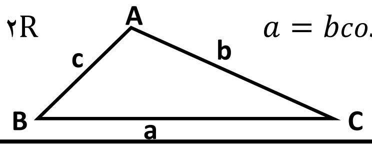
نسبت های مثلثاتی $(-\theta)$ بر حسب θ (ربع چهارم)	نسبت های مثلثاتی $\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)$ بر حسب θ (ربع اول)	نسبت های مثلثاتی $\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)$ بر حسب θ (ربع دوم)	نسبت های مثلثاتی $(\pi-\theta)$ بر حسب θ (ربع دوم)
$sin(-\theta) = -sin(\theta)$ $cos(-\theta) = cos(\theta)$ $tan(-\theta) = -tan(\theta)$ $cot(-\theta) = -cot(\theta)$	$sin\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right) = cos(\theta)$ $cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right) = sin(\theta)$ $tan\frac{\pi}{۲}-(\theta) = cot(\theta)$ $cot\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right) = tan(\theta)$	$sin\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = cos(\theta)$ $cos\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = -sin(\theta)$ $tan\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = -cot(\theta)$ $cot\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = -tan(\theta)$	$sin(\pi-\theta) = sin(\theta)$ $cos(\pi-\theta) = -cos(\theta)$ $tan(\pi-\theta) = -tan(\theta)$ $cot(\pi-\theta) = -cot(\theta)$
نسبت های مثلثاتی $(\pi+\theta)$ بر حسب θ (ربع سوم)	نسبت های مثلثاتی $\left(\frac{۳\pi}{۲}\pm\theta\right)$ بر حسب θ (ربع چهارم)	نسبت های مثلثاتی $(۲\pi-\theta)$ بر حسب θ (ربع چهارم)	نسبت های مثلثاتی $(۲\pi+\theta)$ بر حسب θ (ربع اول)
$sin(\pi+\theta) = -sin(\theta)$ $cos(\pi+\theta) = -cos(\theta)$ $tan(\pi+\theta) = tan(\theta)$ $cot(\pi+\theta) = cot(\theta)$	$sin\left(\frac{۳\pi}{۲}\pm\theta\right) = -cos(\theta)$ $cos\left(\frac{۳\pi}{۲}\pm\theta\right) = \pm sin(\theta)$ $tan\left(\frac{۳\pi}{۲}\pm\theta\right) = \mp cot(\theta)$	$sin(۲\pi-\theta) = -sin(\theta)$ $cos(۲\pi-\theta) = cos(\theta)$ $tan(۲\pi-\theta) = -tan(\theta)$ $cot(۲\pi-\theta) = -cot(\theta)$	$sin(۲\pi+\theta) = sin(\theta)$ $cos(۲\pi+\theta) = cos(\theta)$ $tan(۲\pi+\theta) = tan(\theta)$ $cot(۲\pi+\theta) = cot(\theta)$

نکته ۱ : در دو زاویه متمم **sin** یکی با **cos** دیگری و **tan** یکی با **cot** دیگری برابر است .

روابط خاص در مثلث دلخواه

$$A + B + C = ۱۸۰^\circ \qquad a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲b.c.cosA$$

$$\frac{a}{sinA} = \frac{b}{sinB} = \frac{c}{sinC} = ۲R \qquad a = bcosC + ccosB$$



نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل و ۲ برابر و ۳ برابر کمان

نسبت های مثلثاتی $(\alpha-\beta)$ بر حسب α و β (بسط مجموع)	نسبت های مثلثاتی $(\alpha+\beta)$ بر حسب α و β (بسط مجموع)
$sin(\alpha-\beta) = sin\,\alpha\, sin\,\beta - cos\,\alpha\, cos\,\beta$ $cos(\alpha-\beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{۱+\tan\alpha.\tan\beta}$ $cot(\alpha-\beta) = \frac{cot\,\alpha.\cot\beta+۱}{cot\,\alpha-\cot\beta}$	$sin(\alpha+\beta) = sin\,\alpha\, sin\,\beta + cos\,\alpha\, cos\,\beta$ $cos(\alpha+\beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{۱-\tan\alpha.\tan\beta}$ $cot(\alpha+\beta) = \frac{cot\,\alpha.\cot\beta-۱}{cot\,\alpha+\cot\beta}$
نسبت های مثلثاتی (۳α) بر حسب α	نسبت های مثلثاتی (۲α) بر حسب α
$sin(۳\alpha) = ۳sin\,\alpha - ۴sin^۳\,\alpha$ $cos(۳\alpha) = ۴cos^۳\,\alpha - ۳\,cos\,\alpha$ $tan(۳\alpha) = \frac{۳\tan\alpha-\tan^۳\alpha}{۱-۳\tan^۲\alpha}$ $cot(۳\alpha) = \frac{۲\,cot\,\alpha-cot^۳\,\alpha}{۱-۳\cot^۲\alpha}$	$sin(۲\alpha) = ۲sin\,\alpha\, cos\,\alpha$ $cos(۲\alpha) = cos^۲\,\alpha - sin^۲\,\alpha$ $tan(۲\alpha) = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$ $cot(۲\alpha) = \frac{cot^۲\,\alpha-۱}{۲\,cot\,\alpha}$

معادلات مثلثاتی و حالت های خاص $\sin\theta$ و $\cos\theta$

$$\cos x = \cos\alpha \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \end{cases}$$

$$\text{حالت های خاص} \rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi \\ \cos x = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi + \pi \end{cases}$$

$$\sin x = \sin\alpha \rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

$$\text{حالت های خاص} \rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \rightarrow x = k\pi \\ \sin x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \sin x = -۱ \rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

معادلات مثلثاتی و حالت های خاص $\tan\theta$ و $\cot\theta$

$$x = k\pi + \alpha$$

...ot α $\rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi + \alpha \end{cases}$

(حالت های خاص) $\rightarrow \begin{cases} \cot x = ۰ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cot x = ۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ \cot x = -۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$

$\tan x = \tan\alpha \rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \alpha \\ x = k\pi + \alpha \end{cases}$

(حالت های خاص) $\rightarrow \begin{cases} \tan x = ۰ \rightarrow x = k\pi \\ \tan x = ۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ \tan x = -۱ \rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۴} \end{cases}$

تبدیل جمع به ضرب	تبدیل ضرب به جمع
$\sin\alpha + \sin\beta = ۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$	$\sin\alpha . \sin\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
$\sin\alpha - \sin\beta = ۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)$	$\cos\alpha . \cos\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
$\cos\alpha + \cos\beta = ۲\cos\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\cos\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$	$\sin\alpha . \cos\beta = \frac{۱}{۲}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$
$\cos\alpha - \cos\beta = -۲\sin\frac{۱}{۲}(\alpha+\beta)\sin\frac{۱}{۲}(\alpha-\beta)$	$\cos\alpha . \sin\beta = \frac{۱}{۲}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$
$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$	$\tan\alpha . \tan\beta = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$
$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$	$\cot\alpha . \cot\beta = \frac{\cot\alpha+\cot\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$

فرمول های پرکاربرد مثلثات در سوالات

۱) $\sin^{۲}\theta + \cos^{۲}\theta = ۱$

۲) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

۳) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

٤) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{۲}\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}\cos\left(x-\frac{\pi}{۴}\right)$

٥) $\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{۲}\sin\left(x-\frac{\pi}{۴}\right) = -\sqrt{۲}\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$

٦) $۱ + \cot^{۲}\alpha = \frac{۱}{\sin^{۲}\theta}$

۷) $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^{۲}\alpha$

۸) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{۲}{\sin ۲\theta}$

۹) $\cos^{۲}\theta = \frac{۱+\cos ۲\theta}{۲}$

۱۰) $\sin^{۲}\theta = \frac{۱-\cos ۲\theta}{۲}$

۱۱) $\tan\alpha . \cot\beta = ۱$

۱۲) $۱ + \tan^{۲}\alpha = \frac{۱}{\cos^{۲}\theta}$

۱۳) $\sin ۲\theta = \frac{۲\tan\theta}{۱+\tan^{۲}\theta}$

۱۴) $\cos ۲\theta = \frac{۱-\tan^{۲}\theta}{۱+\tan^{۲}\theta}$

فرمول های پرکاربرد مثلثات در سوالات

۱۵) $\cos ۲\alpha = ۲\cos^{۲} \theta - ۱$

۱۶) $\sin^{۴} \theta + \cos^{۴} \theta = ۱ - \frac{۱}{۲} \sin^{۲} ۲\theta$

۱۷) $(\sin \theta \pm \cos \theta)^{۲} = ۱ \pm \sin ۲\theta$

۱۸) $\cot \theta - \tan \theta = ۲\cot ۲\theta$

۱۹) $\tan^{۲} \theta = \frac{۱-\cos ۲\theta}{۱+\cos ۲\theta}$

در هر یک از قسمت های زیر u بر حسب x فرض شده ، همچنین a عدد ثابتی است .

ردیف	تابع	مشتق	مثال	
۱	$\boldsymbol{y = \sin(x)}$	$y' = \cos(x)$	$y = \sin(x)$	$y' = \cos(x)$
۲	$\boldsymbol{y = \sin(ax)}$	$y' = a\cos(ax)$	$y = \sin(۹x)$	$y' = ۹\cos(۹x)$
۳	$\boldsymbol{y = \sin(u)}$	$y' = u'\cos(u)$	$y = \sin((۳x+۱)^{۲})$	$y' = ۶(۳x+۱)\cos(۳x+۱)^{۲}$
٤	$\boldsymbol{y = \sin^{n} u}$	$y' = nu'\cos(u)\sin(u)^{n-۱}$	$y = sin^{۵} ۳x$	$y' = ۵(۳)\, cos\, ۳x\, sin^{۴} ۳x$
۵	$\boldsymbol{y = \cos(x)}$	$y' = -\sin(x)$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
٦	$\boldsymbol{y = \cos(ax)}$	$y' = -a\sin(ax)$	$y = \cos ۹x$	$y' = -۹\sin ۹x$
۷	$\boldsymbol{y = \cos(u)}$	$y' = -u'\sin(u)$	$y = \cos(x^{۲} - ۳)$	$y' = -۲x\sin(x^{۲} - ۳)$
۸	$\boldsymbol{y = \cos^{n} u}$	$y' = -nu'\sin(u)\,(\cos(u))^{n-۱}$	$y = \cos^{۳} ۵x$	$y' = -۳\sin ۵x(\cos ۵x)^{۲}$
۹	$\boldsymbol{y = \tan(x)}$	$y' = (۱ + \tan^{۲} x)$	$y = \tan x$	$y' = (۱ + \tan^{۲} x)$
۱۰	$\boldsymbol{y = \tan(ax)}$	$y' = a(۱ + \tan^{۲} ax)$	$y = \tan ۲x$	$y' = ۲(۱ + \tan^{۲} ۲x)$
۱۱	$\boldsymbol{y = \tan(u)}$	$y' = u'(۱ + \tan^{۲} u)$	$y = \tan(۳x + ۴)$	$y' = ۳(۱ + \tan^{۲}(۳x + ۴))$
۱۲	$\boldsymbol{y = \tan^{n} u}$	$y' = nu'(۱ + \tan^{۲} u)(\tan u)^{n-۱}$	$y = \tan^{۳} ۲x$	$y' = ۲(۳)(۱ + \tan^{۲} ۲x)(\tan ۲x)^{۲}$
۱۳	$\boldsymbol{y = \cot(x)}$	$y' = -(۱ + \cot^{۲} x)$	$y = \cot x$	$y' = -(۱ + \cot^{۲} x)$
١٤	$\boldsymbol{y = \cot(ax)}$	$y' = -a(۱ + \cot^{۲} ax)$	$y = \cot ۵x$	$y' = -۵(۱ + \cot^{۲} ۵x)$
۱۵	$\boldsymbol{y = \cot(u)}$	$y' = -u'(۱ + \cot^{۲} u)$	$y = \cot(x^{۳} - ۱)$	$y' = -۳x^{۲}(۱ + \cot^{۲}(x^{۳} - ۱))$
۱٦	$\boldsymbol{y = \cot^{n} u}$	$y' = -nu'(۱ + \cot^{۲} u)(\cot u)^{n-۱}$	$y = \cot^{۶}(x^{۲})$	$y' = -۱۲x(۱ + \cot^{۲}(x^{۲}))\cot^{۵}(x^{۲})$